

**PROBLEMA 1.**

1. Se consideran la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 1 & \text{si } x \geq -1 \\ \frac{x}{2x} & \\ \frac{x}{x-1} & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

Se pide:

a) Estudiar el dominio y la continuidad de  $f$ .

b) Hallar las asíntotas de la gráfica de  $f$ .

c) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de  $f$  y las rectas  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ .

a) Calculamos  $f'(x)$  y  $f''(x)$ :

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 3)^2} \quad f''(x) = \frac{6(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3}$$

La condición necesaria para que exista un punto de inflexión es:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

- Punto de inflexión de abscisas positiva será  $(1, f(1)) = \left(1, \frac{1}{4}\right)$ .

- Ecuación de la recta tangente en ese punto será:  $y - \frac{1}{4} = m(x - 1)$

$$m = f'(1) = -\frac{2 \cdot 1}{(1^2 + 3)^2} = -\frac{1}{8}$$

$$y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}(x - 1) \Rightarrow x + 8y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{3 - x}{8}$$

b) Esbozamos la gráfica de  $f$  y de la recta tangente del apartado anterior:

\*  $D(f) = \mathbb{R}$

\* Simétrica respecto del eje  $Y$ , pues  $f(-x) = f(x)$

\*  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \Rightarrow$  Asíntota horizontal:  $y = 0$

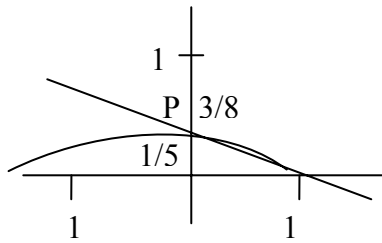
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

\*  $f''(0) = \frac{-6}{27} < 0$  en  $(0, f(0))$ , hay un máximo.

$$\left(0, \frac{1}{3}\right) \rightarrow \text{máximo}$$



\* Calculamos el punto de corte de la recta tangente con el eje Y.



$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3-x}{8} \Rightarrow y = \frac{3}{8} \end{cases}$$
$$P\left(0, \frac{3}{8}\right)$$

$$S_{\text{rec into}} = \int_0^1 \left[ \left( \frac{3-x}{8} \right) - \frac{1}{3+x^2} \right] dx = \int_0^1 \frac{3-x}{8} dx - \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{1\sqrt{3}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2} dx$$
$$= \frac{1}{8} \left[ 3x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left( \frac{x}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^1 = \frac{5}{16} - \frac{\sqrt{3}\pi}{18} = 0,01u^2$$

